学校编码：10384　　　　分类号 ______ 密级 ______
学号：200423036　　　　UDC ____________

厦　门　大　学

硕　士　学　位　论　文

相依风险模型下的破产概率

Ruin Probabilities of Dependent Risk Models

陈　洁

指导教师姓名： 张　志　强　副教授

专　业　名　称： 概率论与数理统计

论文提交日期： 2007 年 5 月

论文答辩日期： 2007 年 　月

学位授予日期： 2007 年 　月

答辩委员会主席： ____________

评　　阅　　人： ____________

2007 **年** 5 **月**

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（　　），在　　　　年解密后适用本授权书。

2、不保密（　　）。

（请在以上相应括号内打"√"）

作者签名：　　　　　　　　　日期：　　　年　月　日

导师签名：　　　　　　　　　日期：　　　年　月　日

目　录

Contents

摘　要

在风险理论中, 破产概率是衡量偿付能力的指标之一, 因此破产概率在精算科学研究中有其重要意义. 保险中有关风险模型的破产概率问题已经被广泛地研究, 在大量研究风险模型的文献中, 总是假设不同类型的保险业务之间是相互独立的, 而实际上, 由于可能引发风险业务的共同因素存在, 不同险种之间可能具有某种相依性, 因此和经典风险模型相比，我们去研究带利率的相依风险模型显得更具有现实意义.

Cossette 和 Marceau(2000)[19] 提出共同冲击风险模型，Kam C.Yuen(2002)[20] 在他们的基础上研究了共同冲击过程是 Erlang 过程的破产概率, 本文第三章考虑了带利率情况下共同冲击过程是 Erlang 过程的风险模型，并得到这种情况下破产概率满足的积分微分方程. 此外另一类刻画相依性的方法是 Kam C. Yuen 和王过京(2002)[21] 提出的稀疏相依结构多险种风险模型. 本文第四章在 Kam C. Yuen 和王过京研究的基础上考虑了一类带利率的稀疏相依结构多险种风险模型，并得到这种情况下破产概率满足的积分微分方程.

关键词：相依性；共同冲击；稀疏相依.

Abstract

One of the most important indexes to weigh the business solvency is the ruin probability in risk theory. So the ruin probability plays an important role in actuarial science. Ruin probability of the insurance risk model has been extensively studied. In most actuarial literature related to risk theory, the assumption of independence between classes of business in an insurance book of business is always made. In practice, however, there are certain corrlelation between classes of business because common factor which cause risl exists, thus comparing with the classical risk model, it is more realistic to consider dependent risl models with rates of interest.

Cossette and Marceau(2000)[19] proposed the common shock risk model. On the basis of their work, Kam C. Yuen(2002)[20] studied the ruin probability when the common shock process was Erlang process. In consideration of interest rate, the intergo-differential equation of infinite ruin probability on such occasion is concluded in Chapter Ⅲ. Besides, another way to describe the risk model of correlated aggregate claims is the thinning-dependence structure which was proposed by Kam C.Yuen and Wang Guojing(2002)[21]. In chapter Ⅳ, we consider a multitype-insurance risk model of the thinning-dependence structure with the rate of interest. and the intergo-differential equation of infinite ruin probability on such case is concluded.

Key words: Correlated aggregate claims; Common shock; Thinning-dependence.

第一章 引 言

在保险、金融、证券投资以及风险管理等领域, 风险理论作为经营者或决策者对风险进行定量分析和预测的一般理论已被广泛应用，它借助于概率论和随机过程理论构造数学模型，来描述各类风险业务过程. 保险业是经营风险的特殊金融服务行业，它通过承保大量的同质风险，通过自身防灾、防损等管理活动，力求降低赔付率，从而获得预期的利润. 一个卓越的保险公司并不是通过提高保险费率、惜赔等方法来增加利润的. 保险公司和投保人为了在一定风险下获得最大收益或为保证一定收益下风险最小必然要对风险和收益进行选择. 因此为了更科学的进行选择，就要对风险过程进行多方面的具体研究，其中风险理论中关于破产概率及其相关问题的研究，已形成了一个重要领域——破产理论.

破产理论是风险理论的核心内容, 对它的研究溯源于瑞典精算师 Filip Lundberg 在 1903 年发表的博士论文, 他的工作奠定了非寿险随机模型的基本结构形式, 也奠定了保险风险理论的基础. 不过 Lundberg 的工作不符合现代数学的严格标准，它的严格化是以 Harald Cramer(1955) 为首的瑞典学派完成的. Harald Cramer 构筑了非寿险数学模型的概率基础，深化了经典破产论的研究内容，使得风险理论成为应用概率统计的一个非常活跃的分支. 在破产理论中，一个非常重要的问题是研究破产概率，即保险公司的盈余首次为负时的概率. 破产概率之所以是破产理论研究的重点，是因为它是精算师的基础工具，是险种制定、保费计算、再保险策略、代理人策略等工作的基础. 关于破产概率的研究, 许多人针对保险公司运作中遇到的种种问题, 通过对概率或统计模型进行修正, 附加必要条件, 得到种种从不同方面进行完善的保险风险模型, 使得模型更接近保险公司的实际运作过程, 这促使风险模型的研究变得更加富有挑战性，所以不同类型风险模型破产概率的研究在国际上 一直是人们关注的一个焦点.

1971 年 Feller W. [1] 在 Harald Cramer 研究的基础上运用更新论证的技巧，利用理赔时间间隔和全概率公式得出了对应的生存概率满足的更新方程和破产概率的 Lundberg 不等式,并利用了关键更新定理同样得到了破产概率的 Lundberg-Cramer 近似表达式； Gerber H. U. (1973)[2] 首次运用随机过程鞅方法，利用风险盈余过程构造一鞅过程，运用鞅的可选停时定理得到了破产概率的显示表达式，也再次证明了破产概率满足的 Lundberg 不等式，这些主要是从论证方法的角度出发对破产概率进行研究. 此外 Gerber 和 Shiu 对经典风险模型破产问题作出的另一重要贡献是引入了两个刻画保险公司破产情况的量 $U(T_-)$ 和 $|U(T)|$ 即破产前的瞬间盈余和破产时的赤字. 此后关于破产时刻、破产前的瞬间盈余和破产时的赤字以及这三者联合分布等问题也成为破产论研究的重要方面，但是由于在大多数情况下这些分布的解析解并不存在，要得到相应的表达式是相当困难的，所以人们开始转而用各种数学工具来研究这些分布的概率性质. 在经典的风险模型中，当个别理赔额服从混合指数分布和混合 gamma 分布时， Gerber 等 (1987,1988)[3],[4] 给出了破产概率和破产前瞬时盈余分布函数的解析表达式； Dickson(1992,1996)[5],[6] 等讨论了破产前瞬时盈余和破产时赤字的边际分布的解析性质，以及它们之间的相互关系；在个别理赔额完全离散的情形下， Dickson(1991,1995)[7],[8] 利用递归的方法去计算这些分布. 进一步的发展是 Gerber 和 Shiu (1997,1998)[9],[10] 提出了折现罚金函数

$$\Phi_\alpha(u) = E[e^{-\alpha T}\omega(U(T_-),|U(T)|)I(T<\infty)|U(0)=u].$$

利用与破产时刻、破产前瞬时盈余和破产时赤字相关的罚金函数的性质来研究它们的联合分布，他们的结果表明罚金折现函数满足一类更新方程. 此后， Lin 和 Willmot 通过对更新方程性质的研究，给出了相应的矩满足的积分方程，从而可以用递归的方法来求出矩的近似值.

在经典风险模型及随后对其进行的许多推广研究中有一个很重要的假设，那就

是理赔到达过程是泊松过程，用泊松过程描述的主要原因一是泊松过程是一种既典型又简单的，应用极其广泛的随机过程，许多社会管理活动中各种需要等待服务的管理问题，经常可以用泊松分布或泊松过程描述，比如单位时间段内电话交换台接到的呼叫次数，到车站、码头和机场的旅客人数等等. 对于一个保险公司来说，客户因发生损失上门要求按合同赔付的人数也类似于这种等待服务的现象，因而在一般情况下会采用泊松过程来近似描述. 其次，由于当理赔到达过程是参数为 λ 的泊松过程时，则理赔相继到达的时间间隔必服从参数为 λ 的指数，因此我们在进行数学计算的处理过程就变得相对简单些. 但是很多社会现象是很复杂的，仅讨论理赔到达是泊松过程就过于单一了，且有时并不符合实际，因此，对理赔为非泊松到达的风险模型的研究得到了极大的关注. Ammeter(1948)[11] 提出的 Cox 风险模型，即将经典的风险模型中理赔到达过程由强度为常数的泊松过程，推广到强度为一随机过程的双重随机过程； Reinhard(1984)[12] 对强度过程为两状态的马氏过程，理赔额服从指数分布的 Cox 模型做了充分的研究； Grandell J. (1991)[13] 在其专著中也重点讨论了更新过程模型和 Cox 风险模型，不过研究的难度很大，而且研究的内容也不大深入； Sparre Anderson(1957) 着手研究了理赔为一般更新到达风险模型的终极破产概率； Gerber(1983) 引入了复合的混合泊松风险过程，讨论这种情况下的破产概率； Gran-dell(1997)[14] 较为细致的研究了复合的混合泊松风险过程及破产概率在理赔额分布分别是轻尾分布和重尾分布时的渐进情形；由于 Erlang 过程比泊松过程具有更多的适应性，目前有很多学者研究了理赔到达过程是 Erlang 过程的风险模型， Dickson, D. C. M. 和 Christian Hipp(1998,2001)[15],[16] 对理赔到达过程是 Eralang 过程的风险模型进行了比较系统的研究，得到了关于破产概率的一些重要结论.

虽然人们从不同角度对经典风险模型进行了不同深度的研究和推广，但是在以上的推广模型中，为研究方便经常忽略很多因素，例如在模型的构建过程中忽略利率

因素. 在现实的保险金融市场中, 除了理赔到达的不确定性外, 还存在另外一种非常重要的风险那就是市场利率的风险, 保险公司的大部分盈余来自于投资收入, 所以在模型中根本不考虑利率因素是不太合理的，基于这种原因带常利率的风险模型正日益受到人们的关注, 但是在有利率的风险模型中, 聚合理赔过程增量就不再具有平稳性, 这就为研究带来了一定的难度, 因此在很多情况下我们也只能是得到一些关于破产概率的基本性质. Sundt 和 Teugels (1995,1997)[17],[18] 研究了常利率下复合泊松模型的终极破产概率，特别地，在个别理赔额服从指数分布的情形下，得到了终极破产概率的显示解. 此外在许多模型的构建过程中经常考虑保险公司只经营一种风险或者假设同时经营多种风险但是却假设不同类型的险种之间理赔发生或理赔到达过程是相互独立的. 但实际上，由于可能引发风险业务的共同因素存在，不同险种之间某种风险理赔发生在一定条件下可能导致另一不同风险理赔的发生；又或者是不同险种之间的理赔到达具有某种相依性，从而引发了对理赔相依风险模型的研究. 其中主要有两类常用的研究相依性风险模型的建模方法，一类是在不同类型保险业务的理赔到达过程中加入一个共同分量，这就是所谓共同冲击风险模型. 在 Marshall 和 Olkin(1967,1988) 所构建的相依关系的基础上， Cossette 和 Marceau(2000)[19] 提出了共同冲击风险模型，主要讨论离散情形下理赔到达过程中加入共同冲击过程的风险模型，其中对于共同冲击过程考虑了不同类型，例如泊松过程、负二项过程等等. 由于 Erlang 过程具有更广泛的适应性且日益引起人们的关注，本文第三章在 Kam C. Yuen(2002)[20] 等研究的基础上考虑了带利率的、共同冲击过程是 Eralang(2) 过程, 内在因素导致的理赔过程是泊松过程的风险模型, 并得到了这种情况下终极破产概率满足的积分微分方程；另一类刻画理赔相依风险的是 Kam C. Yuen 和王过京 (2002)[21] 提出的具有稀疏相依结构的风险模型, 其中假设某一类险种的理赔以一定概率导致对其他类型险种的理赔. 本文第四章在 Kam C. Yuen 和王过京 (2002,2003)[21],[22] 提出的具有稀疏相依结构风险模型的基础上考虑一类带利率的稀

疏相依结构风险模型.

本文是在许多学者研究基础上考虑带利率的相依风险模型的破产概率，对于经典风险模型的破产概率我们很难获取它的精确表达式，现在我们在经典模型中不仅增加了利率的因素而且还考虑了风险的相依性使得问题变得更加复杂，计算也更加繁琐, 甚至很多问题必须掌握更深的理论知识才能解决, 因此本文的研究也只能得到这些问题中破产概率应满足的积分微分方程，但是由于求解非线性常微分方程 (组) 的解析解是比较困难的, 寄希望于通过数值方法代入相应的参数得到问题的数值解.

第二章 预备知识

§ 2.1 经典风险模型

经典风险模型主要研究保险业中的随机模型，保单持有者若遭遇损失可以根据投保条款向保险人理赔，保险公司即按保险合同规定的保险责任赔付被保险人的损失. 经典风险模型从动态角度出发，用一个简单的数学模型来描述保险人的财务状况，即盈余随时间而变化的过程. 聚合风险模型是将所有的保单视为一个整体，以每次理赔为基本对象来建模. 该模型中，理赔的到达次数用一个随机点过程来表示，由保险人支付的每次个别理赔额表示为一类随机变量，保险人收取一定的保费以维持公司正常运作，称保费收入与平均理赔额的差值为 “相对安全负荷”. 此外，通常还假设保险公司有一定的初始准备金. 在不考虑利率、通货膨胀、运营费用和支付红利等因素的前提下，保险公司的盈余可以划分为两部分：具有不确定性因素的理赔作为负债部分，保费收入和初始准备金组成资产部分，当保险公司的盈余小于零的时候，我们称之为 “破产”，虽然此时保险公司可以通过追加资金来维持运营，也就并不意味着保险公司即将倒闭，但是它能够作为保险公司财务预警系统的一个重要指标.

经典风险模型是由 Lundberg 和 Cramer 最初建立起来的，我们通常也称之为 Cramer-Lundberg 模型，其在保险风险理论中具有十分重要的地位. 下面着重介绍一下经典风险模型的构建过程.

给定完备概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, 以下的随机变量均为该空间上的随机变量.

下面给出经典风险模型的简单假定，其主要由下面元素构成：

(1) 理赔额变量

用随机变量 X_k 表示第 k 次的理赔额，个别理赔额序列 $\{X_k\}_1^\infty$ 是独立同分布随机变量序列，其共同分布函数为 $F(x)$, 且 $F(0) = 0$, 均值为 μ.

(2) 理赔到达时刻

用随机变量 T_k 表示第 k 次理赔发生的时刻，且满足 $0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_k < \cdots$.

(3) 理赔到达过程:

用随机过程 $N = \{N(t); t \geq 0\}$ 表示 $(0,t]$ 时间段内理赔发生的次数，其中 $N(0) = 0$. 经典模型中 $N(t)$ 是参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的泊松点过程，且与 $\{X_k\}_1^\infty$ 相互独立.

以上 (1)~(3) 的假定称为经典模型的独立性假定，也是风险模型的理论基础和前提条件. 根据以上的假设，经典风险模型构造过程如下:

假设保险公司的初始准备金为 u ，保费收入按照固定比例 p 随时间线性增长，则一般的盈余过程定义为

$$U(t) = u + S(t). \tag{2.1}$$

其中

$$S(t) = pt - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, (\sum_{k=1}^{0} X_k = 0). \tag{2.2}$$

设 N 有强度 λ, 即 $E[N(t)] = \lambda t$, 令

$$\rho = \frac{p}{\lambda\mu} - 1. \tag{2.3}$$

称 ρ 为相对安全负荷或相对安全附加费因子. 若 $p > \lambda\mu$, 即意味着每单位时间内收到的保费超过单位时间内所支付的理赔额的期望值，此时有正的相对安全负荷. 若不作特别说明，约定相对安全负荷为正. 我们主要讨论如下定义的破产概率问题.

定义 2.1 记 $T = min\{t : t \geq 0$ 且 $U(t) < 0\}$ 为破产时刻即首次出现盈余为负值的时刻，称 $\varphi(u) = P(T < \infty) = P(U(t) < 0, \exists t \geq 0)$ 为破产概率.

在该式中定义的破产概率没有时间限制常称为终极破产概率. 在实际中由于保险公司往往关注的是在某一确定时期内比如在 5 年、 10 年或 20 年之内的经营状

况，数学上即考虑在有限时间间隔 t 内的破产概率，记作：

$$\varphi(u,t)=P(U(s)<0,\exists s\in(0,t]).$$

为方便起见，以 $\phi(u)=1-\varphi(u)$ 表示终极生存概率．当理赔到达过程 N 是齐次泊松过程时，模型 (2.1) 和 (2.2) 构成经典的风险模型．

上面定义的破产概率都是对连续时间而言的，实际中保险人可能仅仅在一个固定的时间间隔上 (如每年) 检验或被监管机构要求检验其偿付能力. 对应于这种情况，需要定义离散时间段上的破产概率．同样的假设保险公司的初始准备金为 u, p 为每一期间保费收入，则盈余过程定义为

$$U(n)=u+S(n). \tag{2.4}$$

其中 $U(n)$ 表示在时刻 $n(n=0,1,2,\ldots)$ 的盈余，

$$S(n)=pn-\sum_{k=1}^{n}X_k,\quad(\sum_{k=1}^{0}X_k=0). \tag{2.5}$$

X_k 表示期间 k 的总理赔额，并且 $\{X_k\}_1^\infty$ 是独立同分布随机变量，共同分布函数为 $F(x)$, 且 $F(0)=0$, 均值为 μ. 由式 (2.4),(2.5) 我们可以将盈余过程写成如下形式：

$$U(n)=u+(p-X_1)+(p-X_2)+\cdots+(p-X_n). \tag{2.6}$$

此时破产时刻定义为

$$T=min\{n:n\geq 0,U(n)<0\}.$$

如果对于所有的 $n=1,2,\ldots$ 有 $U(n)\geq 0$, 则假设 $T=\infty$.

相应令这段期间的破产概率为

$$\varphi(u,1,n)=P(T\leq n).$$

同样的

$$\begin{aligned}\phi(u,1,n) &= P(U_1 \geq 0, U_2 \geq 0, \ldots, U_n \geq 0)\\ &= P(W_1 \geq u+p, W_1+W_2 \geq u+2p, \ldots, W_1+W_2+\\ &\quad \cdots + W_n \geq u+np).\end{aligned}$$

只要检验偿付能力的时间间隔充分小，用于描述破产概率的离散时间模型与连续时间模型具有相同的效果．在计算上，也可以通过离散化途径来近似连续模型下的破产概率．若在 $\varphi(u,1,n)$ 中令 $n \to \infty$, 我们有 $\varphi(u) = P(T < \infty)$, 这也就转化为终极破产概率．

§ 2.2 **经典风险模型的更新方程**

利用 Feller 更新理论的方法，可得到经典风险模型破产概率的更新方程．令 T_1 为第一次理赔发生的时刻．因为在 $(0, T_1]$ 内不会发生破产，所以有

$$\phi(u) = E[\phi(u+pT_1 - X_1)] = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+pt} \phi(u+pt-y)dF(y)dt.$$

令 $s = u + pt$ 作变量替换后得到

$$\phi(u) = \frac{\lambda}{p}\int_u^\infty e^{-\frac{\lambda}{p}(s-u)} \int_0^s \phi(s-y)dF(y)ds.$$

上式两端对 u 求导就有

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{p}\phi(u) - \frac{\lambda}{p}\int_0^u \phi(u-y)dF(y).$$

在对 u 从 0 导 t 积分，并注意到

$$\int_0^t \int_0^u \phi(u-y)dF(y)du = \int_0^t \phi(t-y)F(y)dy.$$

就有

$$\phi(u) = \phi(0) + \frac{\lambda}{p}\int_0^u \phi(u-y)(1-F(y))dy. \tag{2.7}$$